

Zur Theorie quasistationärer thermonuklearer Prozesse

Von L. BIERMANN und A. SCHLÜTER

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforschg. 12 a, 805—814 [1957]; eingegangen am 6. September 1957)

Die physikalischen Bedingungen, unter denen kontrollierte thermonukleare Prozesse quasistationär in einem Fusionsreaktor verlaufen können, sowie Fragen der Aufrechterhaltung und Herstellung dieser Bedingungen werden diskutiert.

The conditions under which controlled thermonuclear processes can be used in a reactor are established. The discussion deals with the theoretical foundations and its applications to achieve and to maintain the necessary physical conditions.

Die vorliegende Arbeit behandelt die Verschmelzung leichter Atomkerne im thermischen Gleichgewicht unter quasistationären kontrollierbaren Bedingungen („thermonukleare Reaktion“).

Die Aufgabenstellung führt unmittelbar, etwa in Analogie zu den Überlegungen über die Kernprozesse in den Sternen, auf die Forderung, eine Temperatur von vielen Millionen Grad in dem reagierenden Gas aufrechtzuerhalten. Hierzu soll der von mehreren Seiten gemachte Vorschlag verfolgt werden, von den besonderen Eigenschaften heißer ionisierter Gase in Magnetfeldern Gebrauch zu machen; bei diesen handelt es sich einmal um die Tatsache, daß solche Gase (Plasmen) infolge ihrer hohen elektrischen Leitfähigkeit in gewissem Sinn in magnetischen Feldern festhängen, ferner um die starke Reduktion der Wärmeleitfähigkeit quer zur Richtung der magnetischen Feldstärke. Hieraus bereits ergibt sich für die Geometrie der zu verwendenden Magnetfelder die Forderung, daß die Feldlinien, die sich in dem erhitzten Gasvolumen befinden, seine Oberfläche nicht durchsetzen dürfen; die einfachsten Zusammenhängeverhältnisse, die diese erfüllen, sind diejenigen eines ringförmigen Torus¹, bei dem die Feldlinien um die Seele oder entlang der Seele verlaufen. Ein wesentliches Thema dieser Untersuchungen bilden demgemäß die verschiedenen Bedingungen dafür, daß eine derartige Konfiguration stationär und stabil ist, ein anderes die Frage, wie die erforderliche Temperatur überhaupt erreicht werden kann, ein drittes das Verhalten der Einzelteilchen selbst. Weitere Probleme stellen die Notwendigkeit der Brennstofferneuerung und die Nutzbarmachung der anfallenden Energie.

Die von verschiedenen Seiten vorgeschlagene Alternative, instationäre Vorgänge wie konvergierende

Stoßwellen zu verwenden, soll hier nicht diskutiert werden¹, ebenso werden die Möglichkeiten nicht-thermischer Verschmelzung, z. B. über die Mesonen-Atome², außer Betracht bleiben, da ihrem Wirkungsgrad sehr niedrig liegende Grenzen gesetzt scheinen; diese beruhen einerseits auf dem geringen energetischen Wirkungsgrad aller Teilchenbeschleuniger, andererseits auf dem im Verhältnis zu den normalen Stoßquerschnitten sehr kleinen Wirkungsquerschnitt für alle Kernreaktionen.

Erste Folgerungen

Tatsächlich lassen sich — außer in kleinen Volumina, die hier außer Betracht bleiben können — stationäre Drucke bis (größenordnungsmäßig) einigen 10^8 dyn/cm² (einige 100 Atm.) gut beherrschen. Diese entsprechen einer magnetischen Feldstärke der Ordnung 30 000 – 50 000 Gauß, die gleichfalls etwa die Grenze des technisch auf einfache Art Erreichbaren darstellen. Wir werden weiter unten sehen, daß sich hieran — wenigstens größenordnungsmäßig — wahrscheinlich auch dadurch nichts ändert, daß die hohe elektrische Leitfähigkeit des Plasmas in diesem selbst elektrische Ströme erlaubt, die viel höhere Feldstärken ergeben würden. Wir wollen demgemäß 10^8 dyn/cm² als obere Grenze für den Plasmadruck annehmen. Dies begrenzt die Teilchendichte N auf 10^{16} cm⁻³, falls die Temperatur zu 10^8 Grad angenommen wird (bzw. 10^{15} /cm⁻³ für $T \approx 10^9$); kT entspricht dann fast genau 10^4 bzw. 10^5 eV (k BOLZMANN-Konstante).

Hieraus folgt bereits, daß in einem Fusionsreaktor die frei – frei-Strahlung der Elektronen (Wellenlänge $\approx 10^{-2} \dots 10^{-1}$ Å), die

¹ Dies geschieht in einer in Vorbereitung befindlichen Arbeit von F. MEYER.

² K. GOTTSTEIN, Phys. Blätter 13, 165 [1957].



$$1,4 \cdot 10^{-27} N_i N_e Z^2 T^{1/2} \quad (1)$$

$$= 1,4 \cdot 10^7 \left(\frac{N_e N_i}{10^{30}} \right) Z^2 \left(\frac{T}{10^8} \right)^{1/2} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3 \text{ sec}}$$

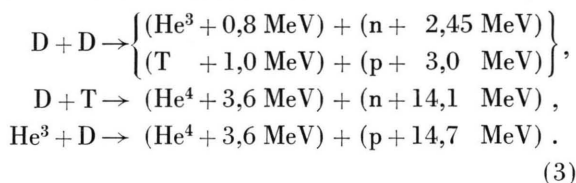
(N_e, N_i in cm^{-3} , T in $^\circ\text{K}$ eingesetzt)

beträgt, im Brennvolumen nicht wieder absorbiert werden kann und daher eine unvermeidbare Ursache von Wärmeverlusten darstellt. Aus (1) folgt nämlich für den Volumen-Absorptionskoeffizienten *

$$10^{-23,2} \frac{N_e^2 Z^2}{T^{7/2}} = 10^{-21,2} \frac{Z^2 (N_e/10^{15})^2}{(T/10^8)^{7/2}} \text{ cm}^{-1}. \quad (2)$$

In den relevanten Wellenlängen ist also die optische Dicke jedes reagierenden Gases unter Laboratoriumsverhältnissen notwendig außerordentlich klein.

Da die abgestrahlte Wärme nur mit mäßigem Wirkungsgrad dem System wieder zugeführt werden kann und noch weitere Verluste hinzukommen, werden stationäre Verhältnisse nur erreicht, wenn die Kernreaktionen mindestens soviel Energie liefern, wie gemäß Gl. (1) ausgestrahlt wird. Dies hat wiederum zur Konsequenz, daß von den Isotopen des Wasserstoffs nur die schweren in Betracht kommen; die Reaktionen zwischen Protonen besitzen infolge des notwendigen β -Zerfalls eine viel geringere Wahrscheinlichkeit, also um viele Größenordnungen geringere effektive Querschnitte. Da die Gewinne und Verluste an Energie $\sim N_i^2$ sind, hängt ihr Verhältnis nur von der Temperatur ab; die Mindesttemperaturen betragen $\approx 4 \cdot 10^8$ $^\circ\text{K}$ (für reines D) bzw. $4 \cdot 10^7$ $^\circ\text{K}$ (für D+T) ³. Die in Betracht kommenden Reaktionen sind vor allem



Bei der angenommenen Dichte ist der Überschuß der verfügbaren Leistung über die Strahlungsverluste von der Ordnung $\approx 10^1 - 10^3$ Watt/cm³. Die nächstschwereren Elemente Li, Be usf. würden wegen ihrer höheren Kernladung entsprechend höhere Temperaturen erfordern; sie sollen hier außer Betracht bleiben.

Bei einer Temperatur von 10^8 Grad beschreibt ein Deuteron von thermischer Energie in einem Magnetfeld der Stärke 20 000 Gauß einen Kreis mit einem Radius von 1 cm. Da dieser Radius proportional zur Wurzel aus der Energie ist, sind die Radien für die geladenen Reaktionsprodukte zunächst etwa eine Zehnerpotenz größer. Wegen der oberen Grenzen für die verfügbaren magnetischen Feldstärken folgen hieraus untere Grenzen für die Querschnitte der verwendbaren Plasmakonfigurationen von $\geq 10^2$ cm².

Die Aufgabe scheint also nur lösbar zu sein, wenn es gelingt, ein Plasma aus D oder einem DT-Gemisch bei einer Temperatur von wenigstens einigen 10^8 Grad (für D) bzw. einigen 10^7 (für DT) und einem Druck $\approx 10^2$ Atmosphären durch Magnetfelder von einigen 10^4 Oersted solange festzuhalten, bis ein wesentlicher Teil der D- bzw. T-Kerne sich zu Helium verschmolzen haben; im Fall der DD-Reaktion geschieht dies in etwa 10^1 sec, im Fall der DT-Reaktion in nicht ganz 1 sec.

Astrophysikalische Analogien

Die Kernprozesse im Sterninneren, welche die Energie der Strahlung der meisten Sterne decken, laufen vor allem infolge der sehr großen optischen Dicke des Sterninneren und der langen Zeitskalen in ganz anderer Weise ab, als sie dies in einem irdischen Fusionsreaktor tun müßten; infolge der großen optischen Dicke ist die quasistationäre Temperatur durch die Ausstrahlung der Sternoberfläche festgelegt, und es gibt eine Mehrzahl von sich bei Temperaturen der Ordnung $10^7 \dots 10^8$ erhaltenden Kernprozessen, unter denen aber diejenigen der schweren Wasserstoffisotopen wahrscheinlich keine Rolle spielen.

Dagegen gibt es eine ganze Anzahl von Erscheinungen in der Astrophysik, bei denen die besonderen Eigenschaften ionisierter Gase, auf die es hier ankommt, hervortreten. So bewirkt die hohe elektrische Leitfähigkeit σ des Sterninneren, daß ein großräumiges Magnetfeld über eine Anzahl von Milliarden Jahren im Stern festgehalten wird ⁴; die relative Diffusion des Magnetfeldes durch das Sterngas ist im einfachsten Fall gegeben durch die Abklingzeit

* Hierzu tragen nur die frei-frei-Übergänge merklich bei; über das Verhältnis dieses Mittels (des Frequenzmittels über die PLANCKsche Funktion) zur Opazität vgl. L. BIERMANN, Nachr. Göttinger Akad. Wiss. **45**, 297 [1933]. Daß die Streuung an den freien Elektronen quantitativ gegen-

über der Absorption überwiegt, ist im vorliegenden Zusammenhang ohne Belang.

³ R. F. POST, Rev. Mod. Phys. **28**, 338 [1956].

⁴ T. G. COWLING, Mon. Not. Roy. Astr. Soc. **105**, 166 [1945].

infolge JOULEscher Wärmeverluste, und diese beträgt größenordnungsmäßig $\sigma Q/c^2$, wo Q ein effektiver Querschnitt ist und σ im elektrostatischen System gemeint ist. Im Innern der Sonne beträgt σ/c^2 , das zur Hauptsache nur von T abhängt, $\approx 10^{-3} \text{ sec/cm}^2$ und bei $10^8 \text{ Grad} \approx 10^{-2} \text{ sec/cm}^2$. Für die Sonne wäre hier ein Querschnitt von $\approx 10^{21} \text{ cm}^2$ anzunehmen, für einen Fusionsreaktor vielleicht $\approx 10^3 \text{ cm}^2$, so daß die resultierenden Zeiten $10^{18} \text{ sec} (= 3 \cdot 10^{10} \text{ Jahre})$ und 10^1 sec wären. Eine entsprechende Rechnung für die Magnetfelder der Sonnenflecken ($\sigma/c^2 \geq 10^{-9} \text{ sec/cm}^2$, $Q \approx 10^{17} - 10^{19} \text{ cm}^2$) zeigt, daß diese Felder jedenfalls weitaus längerlebig als die Flecken selbst sein müssen.

Schon in den Sonnenflecken tragen die magnetischen Spannungen merklich zum hydrostatischen Gleichgewicht bei⁵; sie sind durch die Behinderung des konvektiven Energietransports in den tieferen Schichten wahrscheinlich die Ursache für die Verringerung des Strahlungsflusses an der Oberfläche, welche die Fleckerscheinung bedingt⁶. Noch deutlicher tritt der Einfluß der solaren Magnetfelder in den äußeren Schichten der Sonne hervor, die Filamente werden wahrscheinlich durch die Spannungen der Magnetfelder in ihrer Umgebung und darunter getragen⁷, und die Bewegungserscheinungen in der Chromosphäre und der Korona erscheinen deutlich von den lokalen Magnetfeldern beeinflusst⁸, im Falle der solaren Korpuskularstrahlung durch sie sogar mitbedingt⁹. Die Korona selbst bildet zugleich ein Beispiel eines sehr heißen Gases in einem Strahlungsfeld, dessen Energiedichte und Farbe nur einer Temperatur von einigen 10^3 Grad entspricht; die hohe Ionen- und Elektronentemperatur ($\approx 10^6 \text{ Grad}$) wird infolge der überaus geringen optischen Dicke ($\approx 10^{-16}$) durch eine vergleichsweise geringe Zufuhr nicht-thermischer (mechanischer) Energie ($\approx 10^4 \text{ erg/cm}^2 \text{ sec}$) aufrechterhalten¹⁰. In den Gebieten des interstellaren Raumes, die einigermaßen vollständig ionisiert sind, sind der Gasdruck, die Dichte der magnetischen Energie und die Dichte der Energie der Teilchen der Kosmischen

Strahlung wahrscheinlich von etwa der gleichen Ordnung (je $\approx 10^{-12} \text{ erg/cm}^3$), während infolge geringer Dichte ($\approx 1 \text{ T/cm}^3$) die freien Weglängen aller Teilchen sehr groß sind gegen die Radien der Kreise, welche sie um die magnetischen Kraftlinien beschreiben¹¹. Infolge der großen räumlichen Ausdehnung hängen sowohl die Ionen und die Elektronen wie auch die Teilchen der Kosmischen Strahlung sozusagen in den interstellaren Magnetfeldern fest. Wenn man das interstellare Gas mit dem Plasma in einem Fusionsreaktor vergleicht, so bilden die bei einer Reaktion entstandenen Reaktionsprodukte mit überthermischer Energie, die ihre Energie nur relativ langsam durch Stöße an die Teilchen des thermischen Plasmas abgeben, ein lockeres Analogon zu den Teilchen der Kosmischen Strahlung. Die Resultate über das Verhalten der Kosmischen Strahlung in inhomogenen und gekrümmten Magnetfeldern, z. B. auch dem der Erde, bildet daher einen wertvollen Ausgangspunkt für Untersuchungen über das Verhalten einzelner Teilchengruppen in einem Fusionsreaktor, z. B. der Reaktionsprodukte¹².

Physik des Plasmas

Ein Plasma besteht aus einer Mischung von Elektronen und Ionen (die hier alle einfach geladen sind, bis auf das bei den Reaktionen entstehende He, das wir aber hier nicht betrachten wollen) in fast gleicher Dichte. Die besonderen Eigenschaften eines Plasmas beruhen auf der elektromagnetischen Wechselwirkung der geladenen Teilchen untereinander und mit äußeren Feldern. Nicht ganz ohne Willkür können diese Wirkungen eingeteilt werden in solche, die ein herausgegriffenes Teilchen auf andere Teilchen ausübt, die sich näher als etwa einen DEBYE'schen Radius entfernt befinden, und in die Wirkungen aller Teilchen in einem Volumenelement (groß gegen die DEBYE-Kugel) auf die Teilchen in allen anderen Volumenelementen. Die Einwirkung auf benachbarte Teilchen entspricht den gaskinetischen Zusammenstößen von Teilchen mit Kräften kurzer

⁵ A. SCHLÜTER u. ST. TEMESVÁRY, Proc. Symposium on Electromagnetic Phenomena, Stockholm 1956 (im Druck).

⁶ L. BIERMANN, Vierteljahresschrift d. Astron. Gesellschaft **76**, 194 [1941].

⁷ T. G. COWLING, Magnetohydrodynamics, New York 1957. — R. KIPPENHAHN u. A. SCHLÜTER, Z. Astrophys. **43**, 36 [1957].

⁸ T. G. COWLING in „The Sun“, Herausgeber G. Kuiper, Chicago 1953.

⁹ A. SCHLÜTER, High Altitude Observatory, Solar Research Memorandum Nr. **29**, 1954.

¹⁰ M. SCHWARZSCHILD, Astrophys. J. **107**, 1 [1948]. — L. BIERMANN, Naturwiss. **34**, 87 [1947]; Z. Astrophys. **25**, 161 [1948].

¹¹ E. FERMI, Phys. Rev. **75**, 1169 [1949]. — A. SCHLÜTER u. L. BIERMANN, Z. Naturforsch. **5a**, 237 [1950]. — L. BIERMANN u. A. SCHLÜTER, Phys. Rev. **82**, 863 [1951].

¹² R. LÜST, A. SCHLÜTER u. K. KATTERBACH, Nachr. Gött. Akad. **8**, 127 [1956].

Reichweite; hier überwiegt allerdings der Effekt der fernen Vorübergänge, die zu kleinen Ablenkungen führen, daher ist auch die Zahl der Stöße pro Volumeneinheit, gemessen als die Zahl der Stöße elastischer Kugeln, die den gleichen Effekt hätten, von der Größe des DEBYE-Radius abhängig und also nicht genau proportional zum Quadrat der Dichte. Die Wirkung von Volumenelement zu Volumenelement kann man als Wechselwirkung der gesamten Ladung und des gesamten elektrischen Stromes aller Teilchen in dem betrachteten Element mit dem elektromagnetischen Feld beschreiben, das dann als örtlich und zeitlich kontinuierlich und als glatt über Gebiete von der Ausdehnung des DEBYE-Radius angesehen wird. Damit verliert eine Trennung zwischen äußerem angelegten Feld und innerem, von Plasma erzeugtem Feld an Sinn. Wir werden entsprechend unter \mathfrak{E} , \mathfrak{B} das im Plasma vorhandene (im obigen Sinne geglättete) Feld verstehen, unabhängig davon, wo seine Quellen sind.

Die erste Bedingung, die stets erfüllt sein muß, ist das Gleichgewicht aller Kräfte. Die vom elektromagnetischen Feld ausgeübten Kräfte folgen aus dem MAXWELLSchen Spannungstensor; der elektrische Anteil kann dabei regelmäßig vernachlässigt werden, so daß allein der magnetische Anteil $(1/4\pi) [\mathfrak{B} \text{ rot } \mathfrak{B}]$ bleibt. Dieser Kraft muß die Trägheit und der Gasdruck des Plasmas das Gleichgewicht erhalten. Wenn die Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht nicht zu groß sind, ist der kinetische Drucktensor beider Komponenten isotrop und kann durch skalare Partialdrucke p_e und p_i und den Gesamtdruck p beschrieben werden.

Damit erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = - \frac{1}{4\pi} [\mathfrak{B}, \text{rot } \mathfrak{B}] - \nabla p. \quad (4)$$

Durch die Annahme eines skalaren Druckes, die sicher dann richtig ist, wenn die Geschwindigkeitsverteilung von dem mit \mathbf{v} bewegten Koordinatensystem aus gesehen isotrop ist, hat man insbesondere die innere Reibung vernachlässigt. Es ist jedoch üblich, die Stöße soweit zu berücksichtigen, wie sie den Zusammenhang zwischen elektrischem Strom und elektrischem Feld bestimmen, indem man das OHM'sche Gesetz benutzt, das für einen in einem Magnetfeld bewegenden Leiter lautet:

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathfrak{E} + \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \mathfrak{B} \right] \right). \quad (5)$$

Ergänzt man nun diese Gleichungen durch die MAXWELLSchen Gleichungen (bei denen man häufig den Verschiebungsstrom vernachlässigen kann) und durch die Gesetze idealer Gase, so nennt man das System dieser Gleichungen die magnetohydrodynamischen oder hydromagnetischen Gleichungen.

Die Anwendung dieser Gleichungen auf den Fall, daß die Umlauffrequenz der geladenen Teilchen um die Magnetfeldlinien (Gyrofrequenz) wesentlich größer ist als die Stoßfrequenz, kann allerdings zweifelhaft erscheinen. In diesem Fall, der vermutlich bei einem Fusionsreaktor vorliegen wird und der auch in der Astrophysik häufig ist, beschreiben die Teilchen (in Abwesenheit eines elektrischen Feldes) Spiralen um die magnetischen Feldlinien und legen im Mittel zwischen zwei Stößen einen viel längeren Weg längs der Feldlinien als quer zu ihnen zurück. Daher kann man eine Anisotropie der Leitfähigkeit erwarten, so daß sie quer zum Magnetfeld wesentlich reduziert ist. Da man in einem Fusionsreaktor das Plasma durch die LORENTZ-Kraft

$$- \frac{1}{4\pi} [\mathfrak{B} \text{ rot } \mathfrak{B}] = \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathfrak{B}]$$

zusammenhalten will, muß notwendig mindestens ein Teil des Stromes quer zum Magnetfeld fließen. Daher ist die Frage nach der Reduktion der Leitfähigkeit (die unter den angenommenen Bedingungen den Faktor $\approx 10^{11}$ ausmachen sollte, wenn sie existierte) von Wichtigkeit.

Diese Frage kann durch eine Verfeinerung des Modells eines Plasmas genauer untersucht werden. Man kann dazu das Plasma als ein Gemisch von zwei sich durchdringenden verschiedenen geladenen Flüssigkeiten ansehen, deren jede einer hydrodynamischen Bewegungsgleichung folgt – einschließlich der elektromagnetischen Kräfte und ergänzt durch ein Reibungsglied, das eine Kraft proportional zur Differenz der Geschwindigkeit beider Komponenten darstellt^{13, 14}. Für die mittlere (gewichtet nach den Dichten) Geschwindigkeit \mathbf{v} bleibt die Gl. (4) jedenfalls dann bestehen, wenn die Diffusionsgeschwindigkeit klein gegen die thermischen Geschwindigkeiten ist. An Stelle der Gl. (5) erhält man aber (mit einigen hier angemessenen Vereinfachungen)

¹³ A. SCHLÜTER, Z. Naturforsch. **5a**, 72 [1950]. — M. H. JOHNSON, Phys. Rev. **84**, 566 [1951].

¹⁴ A. SCHLÜTER, Proc. Symposium on Electromagnetic Phenomena, Stockholm 1956.

$$\mathbf{j} = \sigma \left\{ \mathfrak{E} + \left[\frac{\mathbf{v}}{c}, \mathfrak{B} \right] - \frac{1}{e N c} [\mathbf{j}, \mathfrak{B}] + \frac{1}{e N} \nabla p_e \right\}, \quad (6)$$

wo σ der (nichtreduzierte) Wert der Leitfähigkeit und N die Zahldichte jeder Komponente darstellt. Die Größenordnungen sind nun praktisch so, daß $\sigma \rightarrow \infty$ eine gute Approximation darstellt (jedenfalls – wie bereits ausgeführt – für Vorgänge mit einer Zeitkonstanten $\ll 1$ sec). Da der Strom endlich bleibt wegen seiner Verknüpfung mit dem Magnetfeld, bedeutet dies, daß die Klammer $\{ \}$ verschwinden muß, und das kann als eine Bedingungsgleichung für das elektrische Feld (als Funktion des Magnetfeldes und des hydrodynamischen Zustandes) angesehen werden. Wegen der Gl. (4) werden die beiden letzten Glieder mit $[\mathbf{j}, \mathfrak{B}]$ („HALL“-Term) und $\text{grad } p_e$ (Druckdiffusionsterm) von vergleichbarer Größe sein. Wenn aber überhaupt eine Geschwindigkeit quer zum Magnetfeld auftritt, ist das Glied mit $[\mathbf{v}, \mathfrak{B}]$ („Bewegungs-Induktion“) in der Regel groß gegen diese beiden. Wir haben also

$$1. \text{ Näherung } \mathfrak{E} = - \left[\frac{\mathbf{v}}{c}, \mathfrak{B} \right], \text{ d. h. } \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{v} \mathfrak{B}], \quad (7)$$

und das heißt, daß die Feldlinien und Materie aneinanderhängen („eingefrorenes“ Magnetfeld). Daran gibt es die Korrektur durch HALL-Effekt und Druckdiffusion, die in einer Veränderung des elektrischen Feldes gegenüber Gl. (7) besteht. Im statischen Falle haben die Zusatzterme wegen Gl. (4) gewöhnlich ein Potential, so daß das zusätzliche elektrische Feld durch eine Änderung der Raumladungsverteilung erzeugt werden kann und damit wirkungslos bleibt. Schließlich haben wir die Korrektur durch den OHMSchen Term \mathbf{j}/σ – den einzigen wirklich dissipativen Term –, der gegenüber Gl. (7) eine langsame „Diffusion“ des Magnetfeldes durch die Materie oder, wenn man will, der Materie durch das Magnetfeld bewirkt. Die Anwendbarkeit dieser hydrodynamischen Modelle (die sich noch durch Einführung der Trägheit der Träger des elektrischen Stromes und Berücksichtigung von mehr Komponenten verbessern lassen) ist jedoch zweifelhaft, da die freien Weglängen (von der Ordnung 1 km) groß gegen die Dimensionen sind, in denen man das Plasma zusammenhalten will. Insbesondere ist die

Annahme eines isotropen Druckes bedenklich, auch abgesehen von der bereits erwähnten Vernachlässigung der inneren Reibung. Bei der Spiralbewegung der geladenen Teilchen um die magnetischen Feldlinien wird es wenigstens annähernd richtig sein, daß die Geschwindigkeitsverteilung und damit der Drucktensor isotrop ist in der Ebene senkrecht zu den Feldlinien; die Bewegung längs der Feldlinien ist jedoch nur schwach gekoppelt mit der Kreisbewegung, und zwar einmal durch die aus der Bewegungsgleichung folgende adiabatische Invarianz des magnetischen Bahnmomentes¹⁵ und weiter durch die Wirkung der Stöße (auf die wir noch zurückkommen werden). Man wird so dazu geführt, je einen Skalar für den Druck längs und quer zu den Feldlinien einzuführen und dementsprechend die Bewegungsgleichung und die Zustandsgleichung abzändern¹⁶.

Auch mit dieser Verbesserung hat man erst eine makroskopische Beschreibung, die nur Aussagen über gewisse Mittelwerte der Bewegung der einzelnen Teilchen macht, die aber nicht ausschließt, daß sich gewisse Teilchengruppen – z. B. die Teilchen großer Geschwindigkeit – wesentlich anders benehmen, und etwa das Volumen verlassen, indem sie eingeschlossen sein sollten. Wir haben dies Problem das Teilchenverlustproblem genannt. Um es anzugreifen, muß man Aussagen über die Bahn der einzelnen Teilchen gewinnen. Das kann durch explizite Integration der Bewegungsgleichung geschehen¹⁷, durch Ausnutzung von Integralen der Bewegungsgleichung in Fällen einfacher Geometrie¹⁸ und schließlich durch Näherungsbetrachtungen, bei denen nach ALFVÉN die Bewegung in eine Kreisbewegung und eine Driftbewegung des instantanen Kreismittelpunktes zerlegt wird, wie wir noch näher ausführen werden.

Quasistationärer Betrieb

Wenn wir die Frage, wie die Temperatur, bei welcher die Fusion sich energetisch selbst erhält, erreicht werden kann, zunächst zurückstellen, so ergibt bereits die Forderung stationärer und stabiler Verhältnisse eine Mehrzahl von Bedingungen, die jetzt diskutiert werden sollen.

¹⁵ Vgl. hierzu F. HERTWECK u. A. SCHLÜTER, Z. Naturforschg. **12 a**, 844 [1957].

¹⁶ O. F. CHEW, M. L. GOLDBERGER u. F. E. LOW, Proc. Roy. Soc., Lond. A **236**, 112 [1956]; vgl. K. HAIN, R. LÜST u. A. SCHLÜTER, Z. Naturforschg. **12 a**, 833 [1957].

¹⁷ z. B. F. HERTWECK, in Vorbereitung.

¹⁸ R. LÜST u. A. SCHLÜTER, Z. Naturforschg. **12 a**, 850 [1957].

Zunächst ist klar, daß die Bedingung des magneto-hydrostatischen Gleichgewichts, wie es exakt für unendlich große elektrische Leitfähigkeit bestehen kann, nämlich (p Druck)

$$\frac{1}{4\pi} [\mathfrak{B} \operatorname{rot} \mathfrak{B}] + \nabla p = 0 \quad (8)$$

erfüllt sein muß. Sowohl die magnetischen Kraftlinien wie auch die elektrischen Stromlinien liegen also in den Flächen $p = \text{const.}$ Die Zeitskala, in der ein Nichterfülltsein dieser Bedingung sich äußert, ist gegeben durch die Laufzeit einer Druckwelle, also von der Ordnung $1 \mu\text{sec.}$ während quasistationäre Verhältnisse ja über Zeiträume 10^4 sec (bzw. $\leq 1 \text{ sec}$ für DT) erreicht werden müssen. Wir wollen Modell-Lösungen, welche dieser Bedingung entsprechen (ungeachtet der weiterhin zu nennenden Bedingungen) als *stationär* (im engeren Sinn) bezeichnen.

Weiterhin müssen die Lösungen von (8) *stabil* sein gegen das Anwachsen von Störungen des Gleichgewichts. Die Zeitskala, in der Instabilitäten sich auswirken würden, läßt sich schwer allgemein angeben, sie ist aber sicher ebenfalls sehr kurz gegen die durch elektrische Leitfähigkeit gegebene. Das hierdurch angedeutete Stabilitätsproblem magneto-hydrodynamischer Konfiguration hat eine gewisse Verwandtschaft mit denen der Hydrodynamik; die Vermehrung der Zustandsgrößen durch das Hinzukommen des Magnetfeldes wird durch die Vereinfachung ausgeglichen, daß man alle dissipativen Terme wegläßt.

Drittens dürfen die Driftbewegungen quer zum Magnetfeld in den gekrümmten und inhomogenen Feldern, welche das Plasma zusammenhalten sollen, nicht dazu führen, daß einzelne Teilchensorten, etwa diejenigen besonders hoher Energie, das Reaktionsvolumen vorzeitig verlassen. Dies ist das bereits erwähnte *Teilchenverlustproblem*.

Weitere Grenzen für einen stationären Bereich ergeben sich durch das Abklingen der Ströme ins Plasma, durch die Verluste durch Wärmeleitung und in jedem Fall durch die mit wachsendem Anteil der Verbrennungsprodukte rasch wachsenden Strahlungsverluste.

Wir wollen diese Probleme näher diskutieren an dem Beispiel axialsymmetrischer torusartiger Plasmakonfigurationen. In diesem Fall sind Zylinderkoordinaten (r, φ, z) zweckmäßig und das Magnetfeld läßt sich zerlegen in einen meridionalen (r, z) -Anteil, dessen Rotation und Vektorpotential wegen der Symmetrie nur eine azimutale (φ -)Komponente besitzen, und einen azimutalen (φ -)Anteil, dessen Rotation und Vektorpotential in Meridianebenen liegen.

Das Magnetfeld beruht einerseits auf den elektrischen Strömen, die im Plasma oder an dessen Oberfläche fließen und gemäß Gl. (11) die Stationarität (im engeren Sinn) der Lage des Plasmas sichern, andererseits auf Strömen in äußeren Leitern, die durch äußere Mittel aufrechterhalten werden. Wir wollen annehmen, daß an den materiellen Wänden der Druck sehr klein gegen den im Innern des Plasmas ist. Dies wird wegen der Verluste durch Wärmeleitung und zur Vermeidung von Verunreinigung aus der Wand erforderlich sein.

a) Stationarität (im engeren Sinne)

Es sei zunächst gezeigt, daß unter den gemachten Voraussetzungen keine stationäre Konfiguration ohne eine azimutale Stromkomponente im Plasma möglich ist. In diesem Fall würden nämlich nur die (inneren und äußeren) meridionalen Komponenten des elektrischen Stroms, d. h. nur die azimutale Komponente B_φ des Magnetfeldes zur Kraftdichte beitragen

$$\nabla p = \frac{-1}{4\pi} [\mathfrak{B} \operatorname{rot} \mathfrak{B}] = \begin{cases} -B_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) = -\frac{(r B_\varphi)}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi), \\ -B_\varphi \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} = -(r B_\varphi) \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r B_\varphi)}{\partial z}. \end{cases} \quad (9)$$

Es ist also

$$[\nabla(r B_\varphi), \nabla p] = 0, \quad (10)$$

d. h. $r B_\varphi$ ist auf jeder isobaren Fläche konstant. Gl. (9) läßt sich schreiben

$$\nabla p + \frac{1}{8\pi r^2} \nabla (r B_\varphi)^2 = 0. \quad (11)$$

Der Druck p und B_φ müssen also Funktionen nur von r sein. Sie dürfen insbesondere nicht von z abhängen. Dies ist mit dem verlangten geometrischen Charakter nicht verträglich; es gibt also keine torusartige axialsymmetrische Plasmakonfiguration, die ohne azimutale Stromkomponente durch Magnetfelder im Gleichgewicht gehalten würde.

Zur wirklichen Konstruktion axialsymmetrischer stationärer Konfigurationen liegt es daher nahe, von dem Grenzfall rein azimuthaler (toroidaler) Ströme im Plasma auszugehen. Ohne äußere Magnetfelder sind auch diese Konfigurationen instationär; am einfachsten erkennt man dies auf Grund der Analogie zwischen den stationären Strömungszuständen einer inkompressiblen Flüssigkeit und den Lösungen der Gl. (8), gemäß welcher \mathfrak{B} mit der Geschwindigkeit identifiziert werden kann, wenn gleichzeitig p in Gl. (8) durch die *negative* Summe aus der kinetischen Energie pro Gramm und Quotienten aus Druck und Dichte in der hydrodynamischen Gleichung ersetzt wird¹⁹. Der Fall rein azimuthaler elektrischer Ströme im Plasma entspricht also einem Wirbelring, und da dieser ständig Flüssigkeit durch seine Öffnung hindurchpumpt und sich daher im Ganzen gegen die Flüssigkeit bewegen muß, bedeutet dies für den vorliegenden Fall, daß das Magnetfeld nicht nur aus dem Feld bestehen kann, welches durch die azimuthalen elektrischen Ströme im Plasma erzeugt wird.

Um solche Lösungen mit den zugehörigen äußeren Magnetfeldern wirklich zu konstruieren, liegt es nahe, einen Plasmatorus mit azimuthalen elektrischen Oberflächenströmen j_{az}^* zu betrachten. Die Grenzbedingungen an der Oberfläche des Torus lauten dann (B_m = Betrag des meridionalen Magnetfeldes; a = außen, i = innen):

$$\frac{4\pi}{c} j_{az}^* = (B_m)_a - (B_m)_i$$

$$p = \frac{1}{c} j_{az}^* \frac{(B_m)_a + (B_m)_i}{2} = \frac{1}{8\pi} [(B_m)_a^2 - (B_m)_i^2] \quad (12)$$

Da aber keine magnetische Kraftlinie die Torusoberfläche durchdringen darf, impliziert die Abwesenheit elektrischer Ströme im Plasmaintern zugleich $(B_m)_i = 0$. Der magnetische Druck an der Oberfläche, d. h. die Flächenkraft $(1/8\pi) (B_m)_a^2$ muß also überall dem Plasmadruck p gleich sein, und dies hat zur Folge, daß auch die elektrische Flächenstromdichte $(c/4\pi) (B_m)_a$ rund um die Oberfläche des Plasmatorus herum überall dieselbe sein muß. Das Magnetfeld, welches diese azimuthalen elektrischen Ströme aus der Plasmaoberfläche erzeugt, hat bei gegebener Gestalt des Querschnitts im allgemeinen nur annähernd, nicht aber genau die

Eigenschaften, die es an der Torusoberfläche haben muß.

Man wird also auf die Frage geführt, welches auf äußeren elektrischen Strömen beruhende Magnetfeld das von dem Oberflächenstrom erzeugte Feld gerade in solcher Weise ergänzt, daß die Normalkomponente des gesamten Magnetfeldes an der Plasmaoberfläche verschwindet und die Tangentialkomponente überall den gleichen Betrag hat. Dieses Problem ist von BIERMANN, HAIN, JÖRGENS und LÜST^{19a} behandelt worden; bei einer Entwicklung nach Potenzen des Verhältnisses des kleinen zum großen Radius des Torus ($m : a$) ergibt sich als erstes Glied ein homogenes z -paralleles Magnetfeld B_0 der Stärke

$$B_0 = (B_m)_a \frac{1}{2} \frac{m}{a} \left(\ln \frac{8a}{m} - \frac{1}{2} \right).$$

Mit trigonometrischen Funktionen läßt sich noch das nächste Glied dieser Entwicklung finden, eine vollständige Lösung gelingt aber erst mit Hilfe von Torusfunktionen*.

Im Falle der axialen Symmetrie lassen sich die meridionalen und azimuthalen Komponenten des auf Strömen im Plasma beruhenden Magnetfeldes linear miteinander und mit durch Ströme in äußeren Leitern erzeugten Feldern zusammensetzen; daher läßt sich jedes axialsymmetrische Problem mit Oberflächenströmen auf analoge Weise behandeln.

Das Gesamtfeld läßt sich wegen $\text{div } \mathfrak{B} = 0$ nach außen abschließen durch eine geeignete Verteilung azimuthaler elektrischer Ströme auf jeder Rotationsfläche, die durch Rotation einer geschlossenen magnetischen Kraftlinie das Feld \mathfrak{B}_m entsteht; der Meridianschnitt jeder solchen Fläche weicht natürlich um so mehr von der Gestalt des Meridianschnitts des Plasmatorus ab, in je größerer Entfernung von diesem die Kraftlinie gewählt wird. Da B_m längs einer solchen Feldlinie variiert, muß auch die resultierende Flächenkraft, die von der mechanischen Verankerung der stromführenden Leiter aufzunehmen ist, längs den Feldlinien variieren.

Auf die beschriebene Art lassen sich für gegebenen Plasmadruck stationäre Kombinationen von elektrischen Strömen an der Plasmaoberfläche und von äußeren Magnetfeldern finden. Die vollständigen Lösungen ergeben zugleich die Forderungen, die bei den entsprechenden Experimenten realisiert werden müssen.

¹⁹ W. M. ELSASSER, Phys. Rev. **79**, 183 [1950]. — S. LUNDQUIST, Ark. Fys. **5**, 297 [1952].

^{19a} L. BIERMANN, K. HAIN, K. JÖRGENS u. R. LÜST, Z. Naturforschg. **12 a**, 826 [1957].

* Kugelfunktionen, als deren Argument eine hyperbolische Funktion der Toruskoordinaten genommen wird.

b) Magnetohydrodynamische Stabilität

Die Stabilität eines magneto-hydrostatischen Gleichgewichts untersucht man, indem man die magneto-hydrodynamischen Gleichungen in der Umgebung des Gleichgewichts linearisiert und feststellt, ob diese Gleichungen Lösungen zu den gegebenen Randbedingungen haben, die mit der Zeit dauernd anwachsen. Dies Verfahren ist trotz seiner Kompliziertheit nur näherungsweise richtig. Einmal liefern die magneto-hydrodynamischen Gleichungen nur eine genäherte Beschreibung und zum anderen braucht die Linearisierung auch nicht das genaue Stabilitätsverhalten dieser Gleichungen zu liefern. Da die linearisierten Gleichungen keine zeitabhängigen Koeffizienten besitzen, läßt sich ihre allgemeine Lösung aus Partikularlösungen der Zeitabhängigkeit $e^{i\omega t}$ superponieren, dabei tritt ω^2 als Eigenwert einer räumlichen selbstadjungierten Differentialgleichung auf²⁰. Die linearisierten Gleichungen ergeben also Stabilität (oder mindestens Indifferenz), wenn ω^2 nicht negativ sein kann; die Beantwortung dieser Frage ist daher der Gegenstand der genannten Untersuchungen, die mit ähnlichen analytischen Mitteln vorgehen, indem sie Gebrauch von der Selbstadjungiertheit der räumlichen Differentialgleichung bzw. von ihrer Äquivalenz mit einem Variationsproblem machen. Es ist bisher aber noch nicht entschieden, ob es vorkommen kann, daß einer Lösung der linearen Gleichung mit $\omega^2 > 0$, die also eine periodische Schwingung oder Welle mit zeitlich konstanter Amplitude beschreibt, eine Lösung der nicht linearisierten Gleichungen entspricht, deren Amplitude mit der Zeit dauernd wächst. Ebenso könnte einer linearen Lösung mit $\omega^2 < 0$, die also exponentiell ansteigen kann, eine strenge Lösung entsprechen, die eine Schwingung endlicher Amplitude beschreibt.

Von dieser Schwierigkeit abgesehen, läßt sich das Ergebnis der Stabilitätsuntersuchungen so formulieren: Es gibt Konfigurationen, die sicher instabil sind, z. B. ein stromdurchflossener Plasmafaden in seinem eigenen Magnetfeld („pinch“)²¹; ferner gibt es Bedingungen, deren Erfüllung hinreichend für Stabilität (oder mindestens Indifferenz) ist. So (oder auch durch direkte Rechnung) läßt sich beweisen, daß eine Konfiguration, bei der alle Feldlinien gerade sind (aber mit quer zu den Feldlinien variabler

Feldstärke), sicher nicht instabil ist. Es ist aber noch für keine Anordnung, bei der der Druck in einem endlichen Volumen groß ist und außerhalb dieses Volumens nach allen Seiten abfällt, Stabilität nachgewiesen worden.

c) Teilchenverlustproblem

Um sich bei der Verfolgung der Bahn der einzelnen geladenen Teilchen des Plasmas zwischen zwei Stößen die mühselige Lösung der Bewegungsgleichung zu ersparen, kann man eine auf ALFVÉN²² zurückgehende Näherungsmethode benutzen. In einem homogenen Magnetfeld besteht die Bewegung in einer konstanten Geschwindigkeit v_{\parallel} längs den Feldlinien und in einer Kreisbewegung um die Feldlinien mit der Frequenz $\omega_g = eB/mc$. Zwischen dem Radius a des Kreises, dem Betrag der Kreisgeschwindigkeit und der der Kreisbewegung entsprechenden kinetischen Energie W_{\perp} bestehen die Beziehungen

$$W_{\perp} = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 = \frac{1}{2} m a^2 \omega_g^2. \quad (13)$$

Der Kreisbewegung entspricht ein Kreisstrom, dem ein magnetisches Moment zukommt gemäß

$$\mu = \pi a^2 \frac{e}{c} \frac{\omega_g}{2\pi} = \frac{W_{\perp}}{B}. \quad (14)$$

Die ALFVÉNSCHE Näherung der Bahnbestimmung in nicht zu inhomogenen oder zu schnell veränderlichen Magnetfeldern besteht aus zwei Stücken. Zunächst wird angenommen, daß das wie im homogenen Feld definierte magnetische Bahnmoment eine Konstante der Bewegung ist²³. Weiter wird statt der Bewegung des Teilchens die Bewegung eines Ersatzteilchens betrachtet, das die Bewegung des Mittelpunktes des Gyration-Kreises angibt. Auf das Ersatzteilchen wirkt zusätzlich zur LORENTZ-Kraft die von Inhomogenitäten des Magnetfeldes auf das magnetische Bahnmoment des wahren Teilchens ausgeübte Kraft. Damit folgt für seine Bewegungsgleichung

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = c \left[\mathcal{G} + \left(\frac{\mathbf{u}}{c}, \mathfrak{B} \right) \right] - \mu \nabla B. \quad (15)$$

Diese Gleichung hat man näherungsweise so zu lösen, daß man Lösungen erhält, die nun keine Spiralbewegung zeigen. Dazu zerlegt man die Geschwindigkeit \mathbf{u} in die Komponente parallel zum Felde v_{\parallel} , die identisch ist mit der entsprechenden Geschwindigkeitskomponente des wahren Teilchens, und in die Driftgeschwindigkeit \mathbf{v}_D senkrecht zum Felde. Das

²⁰ K. HAIN, R. LÜST u. A. SCHLÜTER, Z. Naturforschg. **12a**, 833 [1957]. — J. B. BERNSTEIN, E. A. FRIEMAN, M. D. KRUSKAL u. R. M. KULSRUD, im Druck.

²¹ M. D. KRUSKAL u. M. SCHWARZSCHILD, Proc. Roy. Soc., Lond. A **223**, 348 [1954].

²² H. ALFVÉN, Cosmical Electrodynamics, Oxford 1950.

²³ Zum Beweis, daß μ tatsächlich adiabatisch invariant ist, vgl. Anm. ¹⁵, ferner G. HELLWIG, Z. Naturforschg. **10a**, 508 [1955] und M. KRUSKAL, unveröffentlicht.

Trägheitsglied sieht man dann als klein und nur von $v_{||}$ herrührend an. Damit erhält man für den Betrag von v_D in dem Fall, daß die Krümmung (vom Betrag R) in die Richtung wachsender Feldstärke weist (v_D ist dann senkrecht zum Krümmungsvektor).

$$v_D = v_{\perp} a \frac{\nabla_{\perp} B}{2|B|} + \left(\frac{1}{R} \frac{v_{\perp}^2}{v_{\perp}^2} \right) = \frac{v_{\perp}^2}{2\omega_g} \frac{\nabla_{\perp} B}{B} + \frac{v_{\perp}^2}{\omega_g R} \quad (16)$$

($\nabla_{\perp} B$ sei der Betrag der Komponente des Gradienten des Betrages von B senkrecht zu B). Angewendet auf das Beispiel des torusartigen Feldes der angegebenen Dimensionen zeigen diese Beziehungen, daß die Driftgeschwindigkeit der Ionen von der Ordnung 10^5 cm/sec ist, die der Reaktionsprodukte hoher Energie sogar bis $\approx 10^7$ cm/sec, so daß die Näherungsbeziehungen (16) sicher nicht ganz ausreichen. Bei der betrachteten Geometrie führt die azimutale Komponente des Magnetfeldes durch den Teil der Inhomogenität, der auf meridionalen Strömen im Plasma oder an dessen Oberfläche beruht und der daher von dem (großen) Radius der Torussecke unabhängig ist, zu Driftbewegungen in Meridianebenen um die Torussecke herum. Dagegen erfolgen die Driftbewegungen, die mit der Hauptkrümmung des Torus zusammenhängen und deren Geschwindigkeit wegen $(\text{rot } B)_z = 0$ gegeben ist durch

$$v_D = \frac{\frac{1}{2} v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2}{\omega_c r} = c \frac{m \left(\frac{1}{2} v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2 \right)}{Z e B r} \quad (17)$$

zu Driftbewegungen parallel zur z -Achse. Ihre Geschwindigkeit ist zwar im Verhältnis R/r kleiner als die der vorgenannten Driftbewegungen, sie sind aber offenbar noch viel zu groß, wenn über Zeiten der Ordnung 1 sec oder mehr stationäre Verhältnisse herrschen sollen.

Wenn wir das unter b) besprochene Ergebnis von der zylindrischen Symmetrie auf die des Torus übertragen, sind Konfigurationen mit nur azimutalen elektrischen Strömen im Plasma instabil. Die zuletzt wie schon unter a) diskutierten Verhältnisse zeigen, daß auch Konfigurationen mit nur meridionalen elektrischen Strömen im Plasma nicht stationär sein können. Dies führt wieder auf die Betrachtung von Konfigurationen, mit zugleich meridionalen und azimutalen Komponenten von Strom und Magnetfeld, so daß die magnetischen Kraftlinien an der Plasmaoberfläche schraubenförmigen Charakter besitzen.

Die Bahnen einzelner Teilchen in solchen Magnetfeldern lassen sich mit ähnlichen Methoden behan-

deln, wie dies im Zusammenhang mit den theoretischen Problemen des Polarlichts und der Kosmischen Strahlung für die Bewegung schneller geladener Teilchen im Erdmagnetfeld geschehen ist. Insbesondere sind die Integrale der Bewegungsgleichung und die hier auftretenden verbotenen Gebiete im gegenwärtigen Zusammenhang von Interesse. Die zitierte Untersuchung¹⁸ hat zu dem Ergebnis geführt, daß bei axialsymmetrischen Konfigurationen die meridionale Komponente des Magnetfeldes und nur diese dazu beiträgt, die geladenen Teilchen im Torus festzuhalten. Es gibt für alle Teilchen einer bestimmten Energie mit gegebenem Drehimpuls um die z -Achse torusartige Flächen, welche nicht überschritten werden können. Die Driftbewegungen infolge der Einzelkomponenten addieren sich also keineswegs vektoriell, sondern es ist durchaus möglich, durch einen azimutalen Strom geeigneter Stärke die Teilchen am Verlassen des Plasmatorus zu hindern.

Der Druckunterschied zwischen dem Plasmatorus und seiner Umgebung bewirkt ein elektrisches Raumladungsfeld, welches für sich genommen auch eine Drift auf isobare Flächen bewirkt, die wiederum von der Ordnung 10^{-4} cm/sec ist (für $kT \approx 10$ keV).

Zündung

Die Mächtigkeit des in dem Plasmatorus enthaltenen Gases würde nach den eingangs genannten Zahlen (bei einem Querschnitt von 10^3 cm²) $10^{17} \dots 10^{18}$ Atome pro Quadratcentimeter der Oberfläche, d. s. 10^{-6} g/cm² betragen. Dies entspricht fast der Mächtigkeit der Sonnenkorona ($T \approx 10^6$ °K), aber nur etwa $10^{-5} \dots 10^{-4}$ derjenigen der Atmosphäre der Sterne frühen Spektraltyps ($T_{\text{eff}} \approx 10\,000 \dots 20\,000$ °K), in denen die Teilchendichte nur um einen Faktor ≈ 10 geringer ist und der atomare Wasserstoff den größten Beitrag zur Ausstrahlung liefert. Die optische Dicke ist um so geringer, je höher die Temperatur ist, entsprechend dem Verhalten der Absorptionskoeffizienten.

Für die Beurteilung der Mechanismen, mit denen das Gas auf die erforderliche Temperatur gebracht werden soll, ist neben dem Betrag der Wärmeenergie von besonderer Bedeutung die Zeitskala, in der diese bei gegebener Temperatur wieder ausgestrahlt werden würde. Die erstere beträgt

$10^2 (T/\text{°K}) \text{ erg/cm}^2 \approx 10^2 (kT/\text{keV}) \text{ Wattsec/cm}^2$ außer im Bereich zwischen 10^4 und 10^5 °K, in welchem die Ionisation wesentlich zum Wärmeinhalt beiträgt; die Ausstrahlung beträgt dagegen im Be-

reich $10\,000 \dots 20\,000 \text{ }^\circ\text{K}$ (d. h. $kT = 1 \dots 2 \text{ eV}$) $10^9 \dots 10^{10} \text{ erg/cm}^2 \text{ sec} \approx 10^2 \dots 10^3 \text{ Watt/cm}^2$, und bei $T \approx 10^6 \dots 10^8 \text{ }^\circ\text{K}$ aber gemäß Gl. (1) $10^9 \dots 10^{10} \text{ erg/cm}^2 \text{ sec}$. Die Aufheizung muß daher mindestens in ihren ersten Stadien rasch vor sich gehen.

Folgende Mechanismen lassen sich zur Aufheizung heranziehen:

a) Induktion elektrischer Ströme im Plasma, insbesondere durch ringförmig geschlossene elektrische Felder, deren Energie als JOULEsche Wärme abgegeben wird.

b) Einstrahlung von Hochfrequenzstrahlung unter Ausnutzung der Eigenfrequenzen des Plasmas.

c) Erzeugung hydrodynamischer Schwingungen oder Wellen durch Änderung der äußeren Magnetfelder.

d) Erzwungene Modulation der Magnetfelder mit etwa der Stoßfrequenz der Ionen („Gyrorelaxation“).

Zu a): Die Induktion ringförmig geschlossener elektrischer Ströme, etwa durch Entladungen von Kondensatorbatterien, ist vielleicht das nächstliegende Mittel im unteren Temperaturbereich. Die zur Verfügung stehende Gesamtenergie ist maximal $\approx 10^6 \text{ Wattsec}$, welche etwa dem Wärmehalt von $10^{17} \dots 10^{18}$ Ionen + Elektronen bei $T \approx 10^6 \text{ }^\circ\text{K}$ entsprechen. — Die Zeitskala $\sigma Q/c^2$ des Abklingens dieser Ströme beträgt für $T \approx 10^5 \text{ }^\circ\text{K}$ ($\sigma = 10^{15} \text{ el.st.E.}$) und $Q \approx 10^3 \text{ cm}^2$ nur 1 msec; ähnlich kurz, wenn auch länger ist die Zeitskala, in der die Ausstrahlungsverluste sich geltend machen.

Zu b): Es ist ein naheliegender Gedanke, die Erwärmung des Gases dadurch zu beschleunigen, daß man eine der Eigenfrequenzen einstrahlt. Bei einer Teilchendichte von $10^{15} \dots 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ beträgt die Plasmafrequenz $\approx 10^{12.5} \text{ sec}^{-1}$, während die bei $\mathfrak{B} = 10^4 \text{ Gauß}$ die Gyrofrequenz der Ionen $10^{7.7} \text{ sec}^{-1}$ ist. Eine genauere Analyse der Verhältnisse²⁴ zeigt aber, daß die Ankopplung an einen äußeren Schwingungskreis schwierig ist.

Zu c): Sowie einmal eine Temperatur der Ordnung $10^6 \text{ }^\circ\text{K}$ und eine Leitfähigkeit von $\sigma \approx 10^{16} \text{ sec}^{-1}$ erreicht sind, können hydromagnetische Effekte auf einfache Art herangezogen werden. Die nächstliegende Methode wäre die magnetische Kompression durch das von der azimuthalen Stromkomponente erzeugte Magnetfeld, soweit das zur Stabilisierung mittels äußerer Ströme erzeugte azimuthale Magnetfeld dem nicht entgegensteht. Man kann durch

entsprechende zeitliche Veränderung des äußeren Magnetfeldes magnetohydrodynamische Wellen erzeugen, deren Energie dann durch Reibung in Wärme verwandelt wird. Die Zeitskala hierfür ist im günstigsten Fall von der Ordnung der Stoßfrequenz $10^5 \dots 10^6 \text{ sec}^{-1}$ ($T \approx 10^6 \text{ }^\circ\text{K}$); die Geschwindigkeit der magnetohydrodynamischen Wellen beträgt bei $B = 30\,000 \text{ Gauß}$ und $\rho \approx 10^{-8} \text{ g/cm}^3$ schon 10^8 cm/sec , entsprechend einer Umlauffrequenz der Wellen um den Torus von 10^4 sec^{-1} .

Zu d): Wenn das äußere Magnetfeld etwa mit der Stoßfrequenz (oder rascher) geändert wird, so ergibt sich ein besonders übersichtliches Bild, wenn vereinfachend angenommen wird, daß abwechselnd das Magnetfeld (z. B. um einen Faktor 10) nach oben und unten geändert wird und dazwischen die Stöße eine Gleichverteilung der kinetischen Energie über die beiden Freiheitsgrade für die Bewegung um die magnetischen Kraftlinien (E_\perp) und den einen Freiheitsgrad (E_\parallel) für die Bewegung parallel \mathfrak{B} herbeiführen. Zwischen den Stößen bewirkt die Konstanz des magnetischen Bahnmoments, daß E_\perp sich $\sim B$ verändert, während E_\parallel konstant bleibt. Der zeitliche Anstieg der Temperatur vollzieht sich dann wie folgt:

	B	E_\perp	E_\parallel	$E = E_\perp + E_\parallel$
	1 10	2 20	1 1	3 21
Stöße				
	10 1	14 1,4	7 7	21 8,4
Stöße				
	1 10	5,6 56	2,8 2,8	8,4 58,8
Stöße				
	10 1	39,2 3,92	19,6 19,6	58,8 23,52 u.s.f.

Pro Zyklus steigt also die Temperatur um den Faktor 2,8.

Diese Verwendung der Relaxation der longitudinalen Freiheitsgrade gegenüber den transversalen („Gyrorelaxation“)²⁵ ist nur ein Beispiel dafür, daß es möglich ist, wegen der großen freien Flugzeit der Teilchen (von der Ordnung 10^{-1} sec für die Ionen) ihre Geschwindigkeitsverteilung zwischen zwei Stößen wesentlich zu beeinflussen. Ein Vorteil ist dabei, daß dies in gewissem Umfang selektiv geschehen kann, so daß hauptsächlich die Ionen aufgeheizt werden, auf deren Temperatur es ja allein ankommt.

²⁴ K. KÖRPER, Z. Naturforschg. **12a**, 815 [1957].

²⁵ A. SCHLÜTER, Z. Naturforschg. **12a**, 822 [1957].